SOLUCIÓN La derivada de $y = \tan x$ es $\dfrac{dy}{dx} = \sec^2 x$. Cuando $x = \pi/4$, la derivada es igual a $\sec^2 \dfrac{\pi}{4} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2$. Así que la recta requerida tiene pendiente 2 y pasa por $(\pi/4, 1)$. Por lo tanto,

$$y - 1 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1$$

■

EJEMPLO 8 Determine todos los puntos en la gráfica de $y = \operatorname{sen}^2 x$ donde la recta tangente es horizontal.

SOLUCIÓN La recta tangente es horizontal cuando la derivada es igual a cero. Para obtener la derivada de $\operatorname{sen}^2 x$, utilizamos la regla del producto.

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^2 x = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x \operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

El producto de sen x y cos x es igual a cero cuando sen x o cos x son iguales a cero; esto es, en $x = 0, \pm\dfrac{\pi}{2}, \pm\pi, \pm\dfrac{3\pi}{2}, \ldots$. ■

Revisión de conceptos

1. Por la definición, $D_x(\operatorname{sen} x) = \lim\limits_{h\to 0}$ _____.

2. Para evaluar el límite en la proposición anterior, primero utilizamos la identidad de la suma de ángulos para la función seno y luego realizamos un poco de álgebra para obtener

$$D_x(\operatorname{sen} x) = (-\operatorname{sen} x)\left(\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}\right) + (\cos x)\left(\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)$$

Los dos límites mostrados tienen los valores _____ y _____, respectivamente.

3. El resultado del cálculo en la proposición anterior es la importante fórmula de la derivada $D_x(\operatorname{sen} x) =$ _____. La correspondiente fórmula para la derivada $D_x(\cos x) =$ _____ se obtiene de manera análoga.

4. En $x = \pi/3$, $D_x(\operatorname{sen} x)$ tiene el valor _____. Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a $y = \operatorname{sen} x$ en $x = \pi/3$ es _____.

Conjunto de problemas 2.4

En los problemas del 1 al 18 encuentre $D_x y$.

1. $y = 2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x$

2. $y = \operatorname{sen}^2 x$

3. $y = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$

4. $y = 1 - \cos^2 x$

5. $y = \sec x = 1/\cos x$

6. $y = \csc x = 1/\operatorname{sen} x$

7. $y = \tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

8. $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

9. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x}$

10. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\tan x}$

11. $y = \operatorname{sen} x \cos x$

12. $y = \operatorname{sen} x \tan x$

13. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

14. $y = \dfrac{1 - \cos x}{x}$

15. $y = x^2 \cos x$

16. $y = \dfrac{x \cos x + \operatorname{sen} x}{x^2 + 1}$

17. $y = \tan^2 x$

18. $y = \sec^3 x$

C **19.** Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = \cos x$ en $x = 1$.

20. Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = \cot x$ en $x = \dfrac{\pi}{4}$.

21. Utilice la identidad trigonométrica $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ junto con la regla del producto para determinar $D_x \operatorname{sen} 2x$.

22. Utilice la identidad trigonométrica $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ junto con la regla del producto para determinar $D_x \cos 2x$.

23. Una rueda de la fortuna de 30 pies de radio está girando en sentido contrario a las manecillas del reloj, a una velocidad angular de 2 radianes por segundo. ¿Qué tan rápido se eleva (verticalmente) un asiento en el borde de la rueda cuando está 15 pies por encima de la recta horizontal que pasa por el centro de la rueda? *Sugerencia:* use el resultado del problema 21.

24. Una rueda de la fortuna de 20 pies de radio está girando en sentido contrario a las manecillas del reloj, a una velocidad angular de 1 radián por segundo. Un asiento en el borde de la rueda está en $(20, 0)$ en $t = 0$.

(a) ¿Cuáles son sus coordenadas en $t = \pi/6$?

(b) ¿Qué tan rápido se está elevando (verticalmente) en $t = \pi/6$?

(c) ¿Qué tan rápido se está elevando (verticalmente) cuando lo hace a la velocidad máxima?

25. Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = \tan x$ en $x = 0$.

26. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = \tan^2 x$, donde la recta tangente es horizontal.

27. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = 9 \operatorname{sen} x \cos x$, donde la recta tangente es horizontal.

28. Sea $f(x) = x - \operatorname{sen} x$. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = f(x)$, donde la recta tangente es horizontal. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = f(x)$, donde la recta tangente tiene pendiente 2

29. Demuestre que las curvas $y = \sqrt{2} \operatorname{sen} x$ y $y = \sqrt{2} \cos x$ se intersecan en ángulos rectos sobre cierto punto, con $0 < x < \pi/2$.

30. A los t segundos, el centro de un corcho que se balancea está $3 \operatorname{sen} 2t$ centímetros arriba (o abajo) del nivel del agua. ¿Cuál es la velocidad del corcho en $t = 0, \pi/2, \pi$?

31. Utilice la definición de la derivada para demostrar que $D_x(\operatorname{sen} x^2) = 2x \cos x^2$.

32. Utilice la definición de la derivada para demostrar que $D_x(\operatorname{sen} 5x) = 5 \cos 5x$

GC *Los problemas 33 y 34 son ejercicios para computadora o calculadora gráfica.*

33. Sea $f(x) = x \operatorname{sen} x$.

(a) Dibuje las gráficas de $f(x)$ y de $f'(x)$ en $[\pi, 6\pi]$.

(b) ¿Cuántas soluciones tiene $f(x) = 0$ en $[\pi, 6\pi]$? ¿Cuántas soluciones tiene $f'(x) = 0$ en este intervalo?

(c) ¿En la siguiente conjetura, qué es incorrecto? Si f y f' son funciones continuas y derivables en $[a, b]$, si $f(a) = f(b) = 0$, y si $f(x) = 0$ tiene exactamente n soluciones en $[a, b]$, entonces $f'(x) = 0$ tiene exactamente $n - 1$ soluciones en $[a, b]$.

(d) Determine el valor máximo de $|f(x) - f'(x)|$ en $[\pi, 6\pi]$.

34. Sea $f(x) = \cos^3 x - 1.25 \cos^2 x + 0.225$. Determine $f'(x_0)$ en el punto x_0 en $[\pi/2, \pi]$ donde $f(x_0) = 0$.

Respuestas a la revisión de conceptos:
1. $[\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x]/h$ **2.** 0; 1
3. $\cos x; -\operatorname{sen} x$ **4.** $\frac{1}{2}$; $y - \sqrt{3}/2 = \frac{1}{2}(x - \pi/3)$

2.5 La regla de la cadena

Imagine que trata de encontrar la derivada de

$$F(x) = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$$

Podríamos encontrar la derivada, pero primero tendríamos que multiplicar los 60 factores cuadráticos de $2x^2 - 4x + 1$ y después derivar el polinomio resultante. Y qué tal si trata de encontrar la derivada de

$$G(x) = \operatorname{sen} 3x$$

Podríamos ser capaces de utilizar algunas identidades trigonométricas para reducirla a algo que dependa de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ y después usar las reglas de la sección anterior.

Por fortuna, existe un método mejor. Después de aprender la *regla de la cadena*, seremos capaces de escribir las respuestas

$$F'(x) = 60(2x^2 - 4x + 1)^{59}(4x - 4)$$

y

$$G'(x) = 3 \cos 3x$$

La regla de la cadena es tan importante que rara vez usted derivará alguna función sin utilizarla.

Derivada de una función compuesta Si David puede mecanografiar dos veces más rápido que María, y María puede mecanografiar tres veces más rápido que José, entonces David puede mecanografiar $2 \times 3 = 6$ veces más rápido que José.

Considere la función compuesta $y = f(g(x))$. Si hacemos $u = g(x)$, entonces podremos pensar en f como una función de u. Suponga que $f(u)$ cambia el doble de rápido que u, y $u = g(x)$ cambia tres veces más rápido que x. ¿Qué tan rápido está cambiando y? Los